جامعة محمد الأول
كلية العلوم - وجدة
Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences Oujda
Département de Mathématiques et Informatique

COURS D'ANALYSE 1

FILIERE SMIA

PREMIER SEMESTRE

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2010-2011

CHAPITRE 2 : SUITES REELLES

Pr : Mostafa BELGHIT

CH2 : SUITES DE NOMBRES REELS

A) Généralités sur les suites
1) Définitions
2) Suites monotones
3) Suites bornées

B) Limite d'une suite réelle
1) Définition
2) Suite convergente et suite divergente
3) Propriétés des suites convergentes
4) Ordre et limite
5) Opérations sur limites
6) Moyenne de César

C) Existence de limites (par monotonie , par le critére de cauchy , par les suites adjacentes)

D) Suites extraites , théorème de Bolzano-Weiestrass

E) Comparaison de suites

1)Notation de Landau
2)Suites équivalentes
3)Equivalence et Limite
4)Equivalents usuels

F) Suites récurrentes
F Suites récurrentes

CHAPITRE 2

SUITES DE NOMBRES REELS

A)GENERALITES SUR LES SUITES

♣DEFINITION

Une suite de nombres réels est une application de N (ou de I={n∈N / n ≥ n_0 où n ∈N est fixé} à valeurs dans IR .Au lieu de noter u : N(ou I)→ IR

$n \to \quad u(n)=u_n$

on la note $(u_n)_{n\geq 0}$ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.Le terme u_n est applé le terme géneral de la suite

♦Remarque :

1) Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in N}$ est le terme géneral $_n$

2)Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in N}$ et l'ensemble des valeurs {$u_n$tel que n∈N}

Par exemple , les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $v_n =(-1)^{n+1}$ sont distinctes , mais ont le même ensemble de valeurs {-1 ,+1}}

♦Exemples

$u_n =\sin(n)$; $u_n = \frac{1}{n}, n\in N^*$; $u_n=\frac{1}{n(n-1)}$, $n\geq 2$

$u_{n+1} =au_n +b$ avec a,b dans IR , u_0 un réel donné

▸Suites constantes et stationnaires

Soit$(u_n)_{n\in N}$ une suite numérique.

Elle est dite constante s'il existe a ∈ IR tel que ∀n ∈ N $u_n =a$.

Elle est dite stationnaire s'il existe a ∈ IR et n_0 ∈ N tels que ∀n≥ n_0 $u_n =a$ (constante à partir d'un certain indice)

▸Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite arithmétique s'il existe r ∈ IR tel que $u_{n+1} = u_n+r$ avec n≥p où u_p un réel donné (le premier terme de la suite) ,

Le scalaire r est appelé raison de la suite arithmétique.Il est défini de façon unique

♦Remarque:

•La suite $(u_n)_{n\in N}$ est constante si r=0

•Elle est strictement croissante si r>0 ,strictement décroissante si r<0

•Pour tout n ≥p , $u_n = u_p +(n-p) r$

Réciproquement si u_n = a+nb , alors La suite $(u_n)_{n\in N}$ est la suite arithmétique de premier terme u_0=a et de raison b

♣Proposition:

-La somme des (n-p+1) premiers termes d'une suite arithmétique de raison r est

$$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n) \ , \ n\geq p$$

La démonstration est laissée à titre d'exercice

• Application : $u_{n+1} = u_n+1$ avec $u_1 = 1$

$$\Rightarrow u_n = u_1 +(n-1) =n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(1 + n)$$

▸**Suite géométrique**

Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite géométrique s'il existe $q \in$ IR tel que
$\forall n \in N$ $u_{n+1} = q\, u_n$ avec $n \geq p$ où u_p un réel donné (le premier terme de la suite)
Le scalaire **q** est appelé raison de la suite géométrique.(Il est défini de façon unique)
Conséquence : $u_n = q^{n-p} u_p$ pour tout $n \geq p$

♦Remarque:

• La suite est constante si $q=0$, elle est stationnaire en 0 (à partir de n=1) si q=0
•Si q>0 ,la suite garde un signe constant et est monotone .:≠
•Si q<0 ,alors pour tout n les termes u_n et u_{n+1} sont de signes contraires ;
la suite n'est pas donc monotone.
•Réciproquement ,si le terme général s'écrit $u_n = a\, q^n$,alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison **q**.

♣**Proposition**:

La somme des (n-p+1) premiers termes d'une suite géométrique de raison q est:

$$\bullet S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) \quad \text{si } q \neq 1$$

$\bullet S_n = (n-p+1)u_p$ Si q=1

La preuve de cette proposition est laissée à l'étudiant

$$\bullet\text{Application : } \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{2k-1}} = \frac{27}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right)$$

▸**Suite arithmético-géométrique**

Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite arithmético-géométriques si $\exists a,b \in$ IR tel que
$\forall n \in N$ $u_{n+1} = a u_n \pm b$
Si b=0,c'est une suite géométrique .Si a=1,c'est une suite arithmétique

▸**suites monotones**

Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite croissante (resp: strictement croissante) si :
$\forall n \in N$ $u_n \leq u_{n+1}$ (resp: $\forall n \in N$ $u_n < u_{n+1}$)
Elle est dite décroissante (resp: strictement décroissante) si :
$\forall n \in N$ $u_n \geq u_{n+1}$ (resp: $\forall n \in N$ $u_n > u_{n+1}$)
Elle est dite monotone si elle est croissante ou décroissante
Elle est dite strictement monotone si elle strictement croissante ou strictement décroissante
Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes , par exemple
$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in N^*$

▸**Suites majorées , minorées, bornées**

Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite majorée s'il existe un réel M∈IR tel que
$\forall n \in N$,$u_n \leq M$
Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite minorée s'il existe un réel m∈IR tel que
$\forall n \in N$,$u_n \geq m$
Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée
ou bien il existe un réel $K \in IR^{+*}$ tel que $\forall n \in N$, $|u_n| \leq K$
autrement dit l'ensemble des valeurs prises par cette suite est borné
•Notons $(-u_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $-u_n$.
Pour les deux suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(-u_n)_{n\geq 0}$
L'une est minorée ⇔ l'autre est majorée

L'une est croissante$\Leftrightarrow$l'autre est décroissante
L'une est strictement croissante$\Leftrightarrow$l'autre est strictement décroissante

♦Remarque

Les suites constantes , stationnaires sont des suites bornées
(tout simplement parce qu'elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs)

B) LIMITE D' UNE SUITE REELLE

▸**Définitions**

•Soit $(u_n)_{n\in N}$une suite de nombres réels
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in N}$tend vers $+\infty$,quand $n\to\infty$ si:
$\forall A\in IR_+^*\ \exists\, n_0 \in N$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > A$
•On dit qu'une la suite$(u_n)_{n\in N}$ tend vers $-\infty$, quand $n\to\infty$ si:
$\forall A\in IR_-^*\ \exists\, n_0 \in N$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n < A$
•Soit L un nombre réel
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in N}$tend vers L, quand $n\to\infty$ si:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in N$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - L| < \varepsilon$

▸**Définition** : Soit $L\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}$

Si $(u_n)_{n\in N}$tend vers L, quand $n\to\infty$, on dit que L est limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$
On note indifférement : $\lim u_n=L$ ou $u_n \to L$

▸**Suites convergentes et suites divergentes**

Une suite peut avoir trois comportements possibles :
•convergente (admettre une limite finie)
•divergente (admettre une limite infinie)
•divergente (sans admettre une limite) par exemple $u_n =(-1)^n$, $u_n = n\,(-1)^n$

★La définition de limite appelle divers commentaires dans le cas d'une suite convergente.

1)En termes d'intervalles,la condition $u_n \to L$ signifie que dés que l'on se donne un intervalle ouvert $]L-\varepsilon,L+\varepsilon[$,tous les termes de la suite à partir d'un certain indice n_0 (dépendant de ε) sont situés dans cet intervalle.

2)Si pour $\varepsilon > 0$,on a trouvé un n_0,alors pour tout $n_1 > n_0$ convient encore.
(il ne s'agit pas de déterminer tous les entiers n_0 ,mais seulement de prouver l'éxistence de l'un d'entre eux).

3)Si pour $\varepsilon > 0$,on a trouvé un n_0,alors ce $n_0$convient aussi pour les $\varepsilon' > \varepsilon$
Ce dernier point montre qu'il suffit dans la définition de porter son attention sur les nombres ε petits

4)Les nombres $n_0$succeptibles de convenir dans la définition dépendent géneralement de ε ($u_n = \frac{1}{n}$, $n\in N^*$; $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon})+1$)

5)Si deux suites réelles coïncident à partir d'un certain indice , alors elles sont de même nature
c'ést à dire la convergence de l'une entraine celle de l'autre

▸**PROPOSITION** ("Unicité de la limite", si elle existe)

Si une suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers L_1 et converge vers L_2 à la fois alors $L_1 = L_2$

-Preuve :

Supposons que $(u_n)_{n\in N}$ converge à la fois vers L_1et L_2 avec $L_1 \neq L_2$
Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}\ |L_1 - L_2|$.
Puisque $(u_n)_{n\in N}$ converge vers L_1et converge vers L_2 , il existe n_1 et $n_2 \in N$ telsque:
$\forall n\geq n_1$ on ait $|u_n - L_1| < \varepsilon$ et $\forall n\geq n_2$ on ait $|u_n - L_2| < \varepsilon$
En posant $n_0 =\mathrm{Max}(n_1,n_2)$, on a alors $|u_{n_0} - L_1| < \varepsilon$ et $|u_{n_0} - L_2| < \varepsilon$
d'où $|L_1 - L_2| \leq |u_{n_0} - L_1| + |u_{n_0} - L_2| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\ |L_1 - L_2|$
ce qui est contradictoire

♦**Exemple**: Toute suite constante (stationnaire) est convergente

▸**Proposition**:

Toute suite convergente est bornée

Preuve :

Posons $\varepsilon = 1$ dans la définition;

donc pour un certain n_0 on a $|u_n| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$ pour tout $n \geq n_0$

Soit $A = \{ |u_0|, |u_1|, \ldots\ldots\ldots, |u_{n_0-1}|, |L| + 1 \}$

Alors A est une partie finie non vide ; soit M=MaxA , alors

$M \geq 1 + |L| \geq 1 \Rightarrow M \in IR_+^*$ et que $\forall n \in N$ $|u_n| \leq M$.

♦Remarques

•La négation logique de cette proposition est la suivante:

Toute suite non bornée est divergente.

•La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant:$u_n = (-1)^n$

▸**Proposition**

Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est non majorée mais minorée

Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est non minorée mais majorée

La démonstration est laissée à l'étudiant.

$L = +\infty$ ou $-\infty$

▸**Opérations sur les limites**

Les énoncés suivants s'appliquent à des suites admettant une limite dans $IR \cup \{-\infty, +\infty\}$

on a :

1) $u_n \to L \Rightarrow |u_n| \to L$ — $u_n \to -5 \Rightarrow |u_n| \to -5$; alors $u_n \to L \Rightarrow |u_n| \to |L|$

2) $u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0$

3) $u_n \to L_1$ et $v_n \to L_2$

$(u_n + v_n) \to L_1 + L_2$ (si $L_1 + L_2$ existe dans $\overline{IR}$)

$(u_n v_n) \to L_1 L_2$ (si $L_1 L_2$ existe dans $\overline{IR}$)

4)$u_n \to L$ et si λ est un scalaire non nul ,$(\lambda u_n) \to \lambda L$

5) $u_n \to L \neq 0$, alors il existe $n_1 \in N$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $u_n \neq 0$

et on a :$\left(\frac{1}{u_n}\right) \to \frac{1}{L}$(en posant $\frac{1}{\infty} = 0$)

♦**Remarques**:

• La réciproque de (1) est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(-1)^n$

•Si L est fini , $u_n \to L \Leftrightarrow (u_n - L) \to 0$

•Pour 4) si $\lambda = 0$ on a bien sûr $\forall n \in N$ $\lambda U_n = 0$

•Si $u_n \to 0^+$ alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$ et Si $u_n \to 0^-$ alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to -\infty$

Preuve :

•1) et 2) sont triviales.

•3) Soient L_1 et $L_2 \in IR$ et soit $\varepsilon > 0$.

$u_n \to L_1 \Leftrightarrow \exists\, n_1 \in N$ tel que pout tout $n \geq n_1$ on ait $|u_n \to L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$v_n \to L_2 \Leftrightarrow \exists\, n_2 \in N$ tel que pout tout $n \geq n_2$ on ait $|v_n \to L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$on a alors:

pour tout $n \geq n_0$ $|(u_n + v_n) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$

ce qui prouve que$(u_n + v_n) \to L_1 + L_2$

voir démonstration dans le cas où l'une des deux limites est infinie.

Ecrivons $(u_n v_n) - L_1 L_2 = (u_n - L_1) v_n + L_1 (v_n - L_2)$

On par hypothèse

$(v_n)_n$est bornée $\Leftrightarrow \exists M \in IR_+^*$ tel que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in N$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists\, n_1 \in N$ tel que pout tout $n \geq n_1$ on ait $|u_n \to L_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\exists\, n_2 \in N$ tel que pout tout $n \geq n_2$ on ait $|v_n \to L_2| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_1|)}$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a alors: pour tout $n \geq n_0$

$$|(u_n v_n) - L_1 L_2| \leq M|u_n - L_1| + |L_1||v_n - L_2| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{|L_1|\varepsilon}{2(1+|L_1|)}$$

et que $\frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{|L_1|\varepsilon}{2(1+|L_1|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(1+|L_1|)\varepsilon}{2(1+|L_1|)} = \varepsilon$

ce qui prouve que $(u_n v_n) \to L_1 L_2$

voir démonstration dans le cas où l'une des deux limites est infinie.

$u_n = (-1)^n$ ← 5) $u_n \to L \neq 0 \Rightarrow |u_n| \to |L| \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pout tout $n \geq n_1$ on ait $||u_n| - |L|| < \varepsilon$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$ .on obtient pour $n \geq n_1$ $0 < \frac{|L|}{2} < |u_n|$ c'ést àdire $u_n \neq 0$ pour les $n \geq n_1$ et que $\frac{1}{|U_n|} \leq \frac{2}{|L|}$.

Soit $\varepsilon > 0$, toujours comme $(U_n)_n$ converge vers L alors

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pout tout $n \geq n_2$ on ait $|u_n - L| < \varepsilon \frac{|L|^2}{2}$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a alors:

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|L - U_n|}{|u_n L|} < \varepsilon \frac{|L|^2}{2} \cdot \frac{2}{|L|} \cdot \frac{1}{|L|} = \varepsilon$$

ce qui prouve que $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to \frac{1}{L}$

A titre d'exercice montrer que :

- $U_n \to +\infty \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n}\right) \Rightarrow 0$
- $U_n \to 0$ et $(u_n)_n$ strictement positive alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$
- $u_n \to L > 0$ et $v_n \to +\infty$ alors $(u_n v_n) \to +\infty$

▸Propriétés de comparaison et d'encadrement

Soitent $(u_n)_n$ $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles

1) Si $(u_n)_n$ est bornée et $(v_n)_n$ converge vers 0 alors $(u_n v_n)_n$ converge vers 0

2) Si $(u_n)_n$ est une suite positive et converge vers L alors $L \geq 0$.

3) Si $u_n \to L$ avec $L > a$ ($a \in \mathbb{R}$) alors à partir d'un certain indice $u_n > a$

4) Si $u_n \to L_1$ et $v_n \to L_2$ (L_1 et L_2 sont des réels) et telle que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $L_1 \leq L_2$

On notera que la condition $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'entraine pas nécessairement que $L_1 < L_2$

(considérer par exemple $u_n = \frac{1}{2n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.) Ainsi par passage à la limite les inégalité strictes deviennent larges .

5) Si $u_n \to L$, $v_n \to L$, $L \in \mathbb{R}$ et que $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $w_n \to L$

6) $u_n \to 0$ et $|v_n| \leq |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $v_n \to 0$

7) $v_n \to +\infty$ et $v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $u_n \to +\infty$

8) $u_n \to -\infty$ et $v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $v_n \to -\infty$

★Preuve :

1) $(u_n)_n$ est bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq M$

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pout tout $n \geq n_1$ on ait $|v_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

or $|u_n v_n| \leq M|v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ pout tout $n \geq n_1$

ce qui prouve que $(u_n v_n) \to 0$

2) Si $L < 0$ .Posons dans la définition $\varepsilon = (-L)$ on obtient

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pout tout $n \geq n_1$ on ait $|u_n - L| < (-L)$ c'est àdire $u_n < L + (-L) = 0$ d'où contradiction.

3) Posons $\varepsilon = L - a$ dans la définition;

donc pour un certain n_0 on a $|u_n - L| < L - a$ pour tout $n \geq n_0$

$\Rightarrow u_n - L > -(L - a) \Rightarrow u_n > a$ pour tout $n \geq n_0$

4)Conséquence directe de 2)

5)Soit $\varepsilon > 0$ puisque $(u_n)_n$et $(v_n)_n$ convergent vers L,il existe n_1 et n_2 tels que :
pour tout $n \geq n_1$ $|u_n - L| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq n_2$ $|v_n - L| < \varepsilon$
en posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a donc pour tout $n \geq n_0$
$u_n \leq w_n \leq v_n$, $|u_n - L| < \varepsilon$ et $|v_n - L| < \varepsilon$ ce qui implique
$-\varepsilon < u_n - L \leq w_n - L \leq v_n - L < \varepsilon$.donc $(w_n)_n$ converge vers L

6)conséquence directe de 4)

7)Soit A> 0 puisque $u_n \to +\infty$ il existe n_0 tels quepour tout $n \geq n_0$ $u_n > A$
on a donc pour tout $n \geq n_0$ $v_n > u_n > A$ donc $V_n \to +\infty$

8)Démonstration similaire à 6

▸**Exemples**

1) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

En effet : on a pour tout $k \in \{1,2,........,n\}$
$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ d'où en on déduit l'encadrement suivant:
$\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$
on obtient $u_n \to 1$

2)Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$ où x un réel fixé

Comme pour tout x réel et tout entier k ; $kx-1 < E(kx) \leq kx$ alors
en on déduit l'encadrement suivant :
$\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{n+1}{2n}x$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$
on obtient $u_n \to \frac{x}{2}$

1) Déterminer la limite de la suite $(U_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$

On a $u_n \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{n}{\sqrt{3}}$ Il suffit de remarquer que pour tout $k \in \{1,2,.....,n\}$
$\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}}$ et comme $\frac{n}{\sqrt{3}} \to +\infty$ en on déduit que $u_n \to +\infty$

▸ Moyenne de CESARO

•Théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$une suite convergeant vers un réel L,alors la suite $(v_n)_{n\geq 1}$
définie par:

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$$ converge également vers L

(On dit que $(v_n)_n$converge en moyenne vers L ou converge au sens de Césaro)

•Démonstration

Soit $\varepsilon>0$, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L$ alors : $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_1$

on ait $|u_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

On a : $v_n - L = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(U_k - L)$

et que pour $n > n_1$ $|v_n - L| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |(u_k - L)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - L) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n}(u_k - L)$

Posons $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} |(u_k - L)|$, il est clair que $A_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ car

$\sum_{k=1}^{n_1} |(u_k - L)|$ est une constante indépendante de n .

$A_n \to 0$ quand $n \to +\infty \Leftrightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \geq n_2$ on ait $|A_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

par conséquent pour tout $n > \max(n_1, n_2)$ on a :

$|v_n - L| \leq A_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} |u_k - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

ce qui prouve que la suite $(v_n)_n$ converge vers L .

• **La réciproque du théorème est fausse** , comme le montre le montre l'exemple suivant :

$u_n = (-1)^n$ diverge alors que v_n converge vers 0 car $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ -\frac{1}{n} & \text{si n est impair} \end{cases}$

• Le théorème de Césaro admet un prologement pout les suites $(u_n)_n$ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp :$-\infty$)

Soit $(u_n)_n$ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $-\infty$).; alors la suite $(v_n)_n$ définie par

$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$

tend aussi vers $+\infty$ (resp: $-\infty$)

•**Démonstration** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, par hypothése :

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > 3A$

Pour $n \geq n_0$, on a $v_n = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k) > (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k) + (\frac{3(n - n_0)}{n} A$

Posons $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k$, ainsi $V_n > B_n + 3A - \frac{3n_0}{n} A$

Il est clair que $B_n \to 0$, donc $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $|B_n| < A$

De même ,$(-\frac{3n_0}{n} A) \to 0$, donc $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$ on ait

$|-\frac{3n_0}{n} A| < A$

Donc pour $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$ on a $v_n > (-A) + (3A) + (-A) = A$

Ce qui prouve bien que $V_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$

Exemple : $v_n=\frac{\text{Log } n!}{n} \to +\infty$

• **Remarque**

Hypothèse supplémentaire pour obtenir la réciproque du théorème de Césaro

Soit $(u_n)_n$ une suite **monotone**

Soit $(v_n)_n$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$, $n\in N^*$

on suppose que $v_n \to L\in (IR\cup\{-\infty,+\infty\})$ alors u_n tend aussi vers L

▼**Démonstration**

On suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante

(l'autre cas s'en déduit en considérant $(-u_n)$)

Cette suite posséde nécessairement une limite finie ou $+\infty$; cette limite est nécessairement aussi celle de $(v_n)_n$ d'aprés le théorème de Césaro direct

Ainsi l'hypothèse $\lim v_n = L$ et la croissance de $(u_n)_n$ implique $\lim u_n = L$

Exemple : déterminer la limite de la suite définie par :

$$v_n=\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k+1}{n^2k}}$$

En effet : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$ avec $u_k = \sqrt{\frac{k+1}{k}}$

comme $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ alors $v_n \to 1$

C)EXISTENCE DE LIMITES

1) Par monotonie

►**Théorème**

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle croissante .

Si cette suite est majorée , alors elle convergente

Plus précisement $u_n \to \text{Sup}\{ u_n , n\in N\}$ c'est à dire majorée par sa limite.

Si cette suite n'est pas majorée , alors $u_n \to +\infty$

•En considérant la suite $(-u_n)_n$, on en déduit le résultat suivant:

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante

Si cette suite est minorée , alors elle convergente

Plus précisement $u_n \to \text{Inf}\{ u_n , n\in N\}$ c'est à dire minorée par sa limite.

Si cette suite n'est pas minorée , alors $u_n \to -\infty$

•**Remarques**:

1)Notons que ces résultats sont importants parce qu'ils permettent de conclure la convergence de certaines suites sans faire intervenir le "candidat limite"

2)Notons aussi qu'ils exixtent des suites convergentes qui ne sont ni croissantes ni décroissantes,

par exemple , la suite définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in N$

•**Preuve**:

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle croissante et majorée.

Considérons l'ensemble $\{ u_n , n\in N\}$. Cet ensemble est non vide ,majorée , alors il admet une borne supérieure $L \in IR$.

D'aprés la définition de la borne sup , on a:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tel que $L-\varepsilon<u_{n_0} \le L$. Comme $(u_n)_n$ est croissante ,on alors $\forall n\ge n_0$ on ait $L-\varepsilon<u_n \le L$.d'où pour tout $n\ge n_0$ on ait $|u_n - L|< \varepsilon$

Ce qui prouve que $(u_n)_n$ converge vers $L = \mathrm{Sup}\{ u_n , n \in \mathbb{N}\}$.
Maintenant si cette suite n'est pas majorée
alors $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$
Comme $(u_n)_n$ est croissante ,on alors pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq u_{n_0} > A$
Ce qui prouve que $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.

▼**Exercices**

1)Montrer que la suite définie par $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}) + \frac{1}{n!n}$, $n \in \mathbb{N}$ est convergente

(on vérifiera qu'elle est décroissante minorée)

2)Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ est convergente

(on vérifiera qu'elle est croissante majorée)

2) **Par le critére DE CAUCHY**

•**Définition:SUITES DE CAUCHY**

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est de cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| < \varepsilon$
On a aussi le critére équivalent :
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{p+q} - u_p| < \varepsilon$

• **Remarques**:

1) Par négation, $(u_n)_n$ n'est pas de cauchy lorsque:
$\exists \varepsilon > 0$ $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, il existe p et q dans N vérifiant $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$ et $|u_p - u_q| \geq \varepsilon$
2) On netera que cette définition ne fait pas intervenir de candidat limite

▸**Proposition**

Toute suite convergente est de Cauchy

Preuve

Supposons que $(u_n)_n$ converge vers L, alors:
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$
Soient maintenant p et q dans N tels que $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$
d'àprés l'inégalité triangulaire ,on a:
$|u_p - u_q| \leq |u_p - L| + |u_q - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Ce qui prouve que $(u_n)_n$ est de Cauchy
• On verra plus loin que la réciproque est vraie
•Notons qu'une suite qui n'est pas de Cauchy est une suite divergente,

c'est le cas de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k})$

▸**Proposition**

Toue suite de Cauchy est bornée

Preuve:

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| < 1$
en particulier pour tout $p \geq n_0$ $|u_p - u_{n_0}| < 1$ et donc $|u_p| < |u_{n_0}| + 1$ par suite
$(U_n)_n$ est majorée par :
$M = \max\{ |u_0|, |u_1|, \ldots\ldots\ldots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}| + 1\}$

•Revenons à la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k})$

montrons qu'elle est divergente

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n}(\frac{1}{k})$

Or pour tout $k\in \{n+1,n+2,\ldots\ldots,2n\}$ on ait $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ et donc

$u_{2n} - u_n \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

donc il existe un ε(à savoir $\frac{1}{2}$) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un couple $(p,q) \in\mathbb{N}^2$ (à savoir $p=2n$ et $q=n$) vérifiant $p\geq n$, $q\geq n$ et $|u_{2n}-u_n| \geq \frac{1}{2}$

Ce qui prouve que la suite n'est pas de cauchy et donc divergente

▸SUITES ADJACENTES

•Définition

Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si:

$(u_n)_n$ est croissante

$(v_n)_n$ est décroissante

$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

•Remarque : la condition $u_n \leq v_n$ est inutile dans les hypothéses car elle découle des trois autres.

▸Théorème

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors celles-ci convergent vers la même limite L . De plus $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n \leq L \leq v_n$

•Démonstration.

Montrons tout d'abord pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n \leq v_n$

Posons ,pour tout $n\in\mathbb{N}$ $w_n = v_n - u_n$

On a $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$

d'aprés le sens de variation des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ $w_{n+1} - w_n \leq 0$

et donc $(w_n)_n$ est décroissante , en plus elle est minorée car elle est convergente.

comme $w_n \to 0 = \mathrm{Inf}\{w_n , n\in\mathbb{N}\}$ ce qui se traduit par :

pour tout $n\in\mathbb{N}$ $0\leq w_n$ c'est à dire $u_n \leq v_n$

On en déduit encore pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

Comme $(u_n)_n$ est croissante et majorée par v_0 , alors elle converge vers un certain L_1

comme $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par u_0 , alors elle converge vers un certain L_2

En écrivant $v_n = u_n + (v_n - u_n)$, par passage à la limite on obtient $L_2 = L_1$.

Enfin , on a nécessairement pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n \leq L \leq v_n$ car:

$L = \mathrm{Sup}\{u_n , n\in\mathbb{N}\} = \mathrm{Inf}\{v_n , n\in\mathbb{N}\}$

•Application 1

1) Montrons que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par:

$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$, sont adjacentes

En effet:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.ce qui prouve que $(u_n)_n$ est strictement croissante

$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)^2} < 0$ ce qui prouve que $(v_n)_n$ est strictement décroissante

Enfin on a:$(v_n - u_n) = \frac{1}{n.n!}$ et donc $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$

Les suites $(u_n)_n$et $(v_n)_n$sont bien adjacentes donc admettent une limite commune que l'on notera e

On a $e = \sup\{u_n, n\in N\} = \inf\{v_n, n\in N\}$,on a pour tout $n\in N$ $u_n \leq e \leq v_n$

or si $\exists\, n_0 \in N$ tel que $u_{n_0}=e$ alors on aura $u_{n_0}=e < u_{n_0+1} \leq e$ ce qui est impossible et donc $\forall\, n\in N$ $u_n < e < v_n$

2) Montrons que e est un nombre irrationnel

Supposons que $e \in Q$,alors il existe des entiers p et q tels que $e=\frac{p}{q}$ avec$(p,q)\in (N^*)^2$ et $q>1$

On aurait en particulier $u_q < e < v_q$,en réduisant au même dénominateur la somme

$u_q = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{q!}$;on peut écrire $u_q = \frac{k}{q!}$ où $k\in N^*$

d'où $\frac{k}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{k}{q!} + \frac{1}{q.q!}$, en multipliant par q! ,on aura:

$k<p(q-1)!<k+\frac{1}{q}<k+1$. L'entier $p(q-1)!$ serait compris entre k et k+1 qui sont des entiers consécutifs ce qui est absurde.Donc $e \notin Q$

•**Application 2**

Soient a et b deux réels tels que a>b>o.

Soient $(a_n)_n$et $(b_n)_n$deux suites définies par:

$a_0 = a$; $b_0 = b$ et $\forall n\in N$ $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

Montrons que$(a_n)_n$et $(b_n)_n$convergent vers la même limite

En effet : il suffit de montrer qu'elles sont adjacentes.

$\forall n\in N$ $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{4} - a_n b_n$

$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = (\frac{a_n - b_n}{2})^2 \geq 0$

comme elles sont positives il vient$\forall n\in N$ $a_{n+1} \geq b_{n+1}$

d'une part $\forall n\in N$ $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$ donc la suite$(a_n)_n$est décroissante

d'autre part $\forall n\in N$ $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0$.donc la suite$(b_n)_n$est croissante

Enfin $\forall n\in N$ $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)$ car$\sqrt{a_n b_n}) \geq b_n$

d'où on déduit que $0\leq (a_n - b_n) \leq \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0)$.et par conséquent $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$

D)SUITES EXTRAITES

•**Définition**

On appelle extractrice toute application $\varphi : N \to N$ strictement croissante

•**Proposition**

Si φ est une extractrice alors $\forall n\in N$ $\varphi(n)\geq n$ (par récurrence sur n)

•**Définition**

On appelle suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de IR toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ avec φ extractrice

Exemples: les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$,$(u_{n^2})_{n\geq 0}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$

▸**PROPOSITION**

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $L \in (IR\cup\{-\infty, +\infty\})$

alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers L

•**Démonstration**

1) Cas où L est un réel

Soit $\varepsilon > 0$, comme $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers L alors :
$\exists n_0 \in N$ tel que $\forall n \geq n_0$ on ait $|u_n - L| < \varepsilon$
comme $\forall n \in N$ $\varphi(n) \geq n$, $n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - L| < \varepsilon$
ce qui prouve que $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers L

2) Cas $L=+\infty$

Soit $A \in IR_+^*$, comme $u_n \to +\infty$ alors $\exists n_0 \in N$ tel que $\forall n \geq n_0$ on ait $u_n > A$
comme $\forall n \in N$ $\varphi(n) \geq n$, $n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq n_0 \Rightarrow u_{\varphi(n)} > A$, ce qui prouve que
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$

3) Cas $L=-\infty$ (démonstration analogue à la précédente)

▸Remarques

•S'il existe une suite extraite divergente d' une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est divergente
Par exemple la suite définie par $u_n = \cos(n\frac{\pi}{13})$ est divergente car la suite extraite $(u_{13n})_{n\geq 0}$ donc le terme général est $u_{13n} = (-1)^n$ est divergente.

•Il peut arriver qu'une suite extraite d'une suite divergente soit convergente , par exemple la suite dont le terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente mais la suite extraite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ dont $u_{2n} = 1$ est convergente

• S'il existe deux suites extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$ qui convergent vers **deux limites différentes** alors $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge
On retrouve ainsi la divergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = (-1)^n$
en effet ,por tout $n \in N$ $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ .les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers des limites différentes .

▸Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle $(u_{2n})_{n\geq 0}$ $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ ont la même limite $L \in IR \cup \{-\infty , +\infty\}$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers L

•Conséquence :

$(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $L \in IR \cup \{-\infty , +\infty\}$ si et seulement si toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ tendent vers la même limite L

•Démonstration

•Cas $L \in IR$

Soit $\varepsilon > 0$
comme $(u_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers L ,alors : $\exists n_0 \in N$ tel que $\forall n \geq n_0$ on ait $|u_{2n} - L| < \varepsilon$
comme $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers L ,alors : $\exists n_1 \in N$ tel que $\forall n \geq n_1$ on ait $|U_{2n+1} - L| < \varepsilon$
Posons $n_2 = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. Soit $p \geq n_2$
Si p=2n alors $n \geq n_0$ et on ait $|u_{2n} - L| < \varepsilon$ c'est à dire $|u_p - L| < \varepsilon$
Si n=2p+1 alors $n \geq n_1$ et on ait $|u_{2n+1} - L| < \varepsilon$ c'est à dire $|U_p - L| < \varepsilon$
Ce qui prouve que $(U_p)_{p\geq 0}$ tend vers L

•Cas $L=+\infty$ Soit $A \in IR_+^*$

comme $u_{2n} \to +\infty$ alors $\exists n_0 \in N$ tel que $\forall n \geq n_0$ on ait $u_{2n} > A$
comme $u_{2n+1} \to +\infty$ alors $\exists n_1 \in N$ tel que $\forall n \geq n_1$ on ait $U_{2n+1} > A$
Posons $n_2 = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. Soit $p \geq n_2$
Si p=2n alors $n \geq n_0$ et on ait $u_{2n} \geq A$ c'est à dire $u_p > A$
Si n=2p+1 alors $n \geq n_1$ et on ait $u_{2n+1} \geq A$ c'est à dire $U_p > A$
Ce qui pouve$(U_p)_{p\geq 0}$ tend vers $+\infty$

◂Exemple

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que:
$\forall (m,n) \in (N^*)^2$ $0 \leq u_{n+m} \leq \frac{m+n}{mn}$. Montrer que $u_n \to 0$
En effet 1) Posons m=n ,on obtient $0 \leq u_{2n} \leq \frac{2}{n}$ d'où $u_{2n} \to 0$

2)Posons m=n+1 , on obtient $0\leq u_{2n+1} \leq \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ d'où $u_{2n+1} \to 0$

Par conséquent $u_n \to 0$

★**Théorème de Bolzano-Weiestrass** (à admettre)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée , alors on peut extraire de $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente.

La réciproque du théorème est fausse comme le montre l'exemple suivant:

Soit la suite définie par $u_n = \begin{Bmatrix} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{Bmatrix}$

La suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est constante (=0) donc convergente
cependant $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée.

Parmi les applications de ce théorème est la suivante:

▸**Théorème**

Dans IR , toute suite de Cauchy est convergente.

•**Démonstration**:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$une suite de cauchy ; fixons $\varepsilon > 0$.
Comme elle de cauchy alors elle bornée et d'aprés
le théorème de Bolzano-Weiestrass
on peut extraire une suite convergente c'est à dire $\exists(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge
vers une certaine limite L.

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_1$on ait $|u_{\varphi(n)}- L|< \frac{\varepsilon}{2}$

En plus , comme elle de cauchy $\exists$ $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p\geq n_2$ et $q\geq n_2$
on ait $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $n_0 = \max(n_1,n_2)$; ainsi d'aprés l'inégalité triangulaire:
Pour tout $n\geq n_0$ on ait $|u_n - L|\leq|u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)}- L|< \varepsilon$
Ce qui prouve que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers L

•Remarque

Une suite de cauchy dans Q n'admet pas nécessairement de limite dans Q

Par exemple la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est une suite dans Q convergente
(donc de Cauchy) mais sa limite exp(1) n'appartient pas à Q
et donc ne converge pas dans Q

E)COMPARAISON DES SUITES

•**Négligeabilité et domination** Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

Définition :

Ondit que la suite $(u_n)_n$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_n$ et l'on note
$u_n=o(v_n)$ (lire petit o de v_n) si :
$\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall$ $n\geq n_0$ on ait $|u_n| < \varepsilon |v_n|$
si $(v_n)_n$ ne s'annule pas , c'est équivalent à dire que le quotien($\frac{u_n}{v_n}$) converge vers 0.

Remarque:

Si $u_n=o(v_n)$ alors à partir d'un certain rang on peut écrire $u_n= \varepsilon_n v_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$

Exemple :

$n = o(n^2)$, $(\sin(\frac{1}{n}))^3=o(\frac{1}{n})$, $\frac{1}{n^2}=o(\frac{1}{n})$

Définition :

Ondit que la suite $(u_n)_n$ est **dominée** par la suite $(v_n)_n$ et on note
$u_n=O(v_n)$ (lire grand O de v_n) si :
$\exists M > 0$, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall$ $n\geq n_0$ on ait $|u_n| < M|v_n|$
si $(v_n)_n$ ne s'annule pas , c'est équivalent à dire que le quotien($\frac{u_n}{v_n}$) est borné.

Exemple :
$\sin(n)=O(1)$, $2n^2=O(n^2)$
• Suites équivalentes
Définition :
On dit que la suite $(u_n)_n$ est équivalente à la suite $(v_n)_n$ si : $u_n-v_n=o(v_n)$ et on note $u_n \sim v_n$
si $(v_n)_n$ ne s'annule pas , c'est équivalent à dire que le quotient $(\frac{u_n}{v_n}) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$
Remarque :
$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n-v_n=o(v_n) \Leftrightarrow u_n=v_n+o(v_n) \Leftrightarrow u_n=v_n+\varepsilon_n v_n=v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$
Remarque : Ne jamais écrire $u_n \sim 0$. **Cela signifie en fait que la suite** $(u_n)_n$ est nulle à partir d'un certain indice.
Exemple: **Les équivalents usuels**
$\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, $\sin(\frac{1}{n}) \sim (\frac{1}{n})$, $\mathrm{tg}(\frac{1}{n}) \sim (\frac{1}{n})$, $1-\cos(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

$(1+\frac{1}{n})^{\alpha}-1 \sim \alpha\frac{1}{n}$ (pour $\alpha \in IR^*$ fixé) , $e^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}$
• Equivalents et limite
1) $u_n \sim u_n$
2) $u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$
3) $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n \Rightarrow u_n \sim w_n$
4)Si deux suites sont équivalentes alors elles sont de **même signe** à partir d'un certain indice.
5)Si $u_n \to L$ et $L \neq 0$ alors $u_n \sim L$
6) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \to L \in (IR \cup \{-\infty, +\infty\})$ alors $u_n \to L$
7)Si deux suites sont équivalentes alors elles sont toutes deux convergentes de même limite ou toutes deux divergentes.
8) **On peut :**
- multiplier les équivalents
- passer les équivalents à l'inverse
- élever les équivalents à un exposant constant .

9) **On ne peut pas :**
- sommer les équivalents

$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ et $-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n}$
soit $u_n = \frac{1}{n}+(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}) = \frac{1}{n^3}$ et $v_n = (\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne sont pas équivalentes.
- les élever un exposant non constant ($u_n \sim v_n$ n'implique pas que $u_n^n \sim v_n^n$)

Proposition :
Si $U_n \to L \neq 1$ et si $u_n \sim v_n$ alors $\mathrm{Log}u_n \sim \mathrm{Log}v_n$
Remarque:
Les équivalents ne passe pas à l'xponentielle : $u_n \sim v_n$ n'implique pas $\exp u_n \sim \exp v_n$

Exercice : Déterminer un équivalent de la suite $\sum_{k=1}^{n}\exp(\frac{\mathrm{Log}k}{k})$ quand $n \to +\infty$

(Penser à utiliser le théorème de Césaro)
F)SUITES RECURRENTES
Soient D une partie non vide de IR et $f : D \to IR$
On appelle suite récurrente de f toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de D vérifiant
$\forall n \in N\ u_{n+1} = f(u_n)$
•Remarque :

Si on connait $u_0 = a$ alors on peut déterminer chaque terme de la suite
$u_1 = f(a)$, $u_2 = f(u_1) = f(f(a))$, ...

♦ Démarche d'étude d'une suite récurrente

Pour étudier une suite récurrente donnée par :
$u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

- On précise et on étudie la fonction f (domaine de définition , tableau de variation)
- On détermine D vérifiant $u_0 \in D$ et $\forall x \in D$, $f(x) \in D$; ceci justifier l'existence de$(u_n)_n$ et localise les termes de la suite : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in D$
- On détermine les limites finies possibles en passant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite , puis on s'adapte à la situation

▲**Propositions utiles**

- Proposition

Si $|u_{n+1} - L| \leq k\ |u_n - L|$ avec $k \in [0,1[$ alors $u_n \to L$

- Proposition

. On suppose que f est croissante de D vers D

1) Si $f(u_0) \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_n$ est croissante .
2) Si $f(u_0) \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
3) Si $u_0 \leq \alpha$ où α point fixe de f ($f(\alpha) = \alpha$) alors la suite $(u_n)_n$ est majorée par α.
4) Si $u_0 \geq \alpha$ où α point fixe de f ($f(\alpha) = \alpha$) alors la suite $(u_n)_n$ est minorée par α.

- Proposition

On suppose que f est décroissante de D vers D alors les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et de monotonie contraire

Preuve :

Posons $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$ alors :
$x_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = (f\circ f)(u_{2n}) = (f\circ f)(x_n)$
comme f est décroissnte sur D alors f∘f est croissante sur D et on déduit :
1)si $u_2 \geq u_0$ alors alors la suite $(u_{2n})_n$ est croissante c-à-d $u_{2n} \leq u_{2n+2} (x_n \leq x_{n+1})$
par la suite $u_{2n} \leq u_{2n+2} \Leftrightarrow f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) \Leftrightarrow u_{2n+1} \geq u_{2n+3} \Leftrightarrow y_n \geq y_{n+1}$
par conséquent la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.
2)si $u_2 \leq u_0$ alors la suite $(u_{2n})_n$ est décroissante c-à-d $u_{2n} \geq u_{2n+2} (x_n \geq x_{n+1})$
par la suite $u_{2n} \geq u_{2n+2} \Leftrightarrow f(u_{2n}) \leq f(u_{2n+2}) \Leftrightarrow u_{2n+1} \leq u_{2n+3} \Leftrightarrow y_n \leq y_{n+1}$
par conséquent la suite $(u_{2n+1})_n$ est croissante.

Exemple : Etudier la nature de la suite récurrente définie par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$
- Posons $f(x) = \sqrt{2+x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2+x}} > 0 \Rightarrow$ f est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$
comme $1 = u_0 < u_1 = \sqrt{3}$ alors le suite $(u_n)_n$ est croissante .
- Comme f est continue sur $[-2, +\infty[$ et si $(u_n)_n$convergeait , sa limite α doit vérifié l'équation $\alpha = \sqrt{1+\alpha}$ c'est à dire $\alpha = -1$ ou bien $\alpha = 2$ comme $(u_n)_n$ est positive alors sa limite n'est autre que $\alpha = 2$.
- Montrons par récurrence sur n que la suite$(u_n)_n$ est majorée par 2
supposons que $u_n \leq 2$ alors $f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow u_{n+1} \leq f(2) = 2$
$(u_n)_n$ est croissante et majorée donc elle est convergente.

BIBLIOGRAPHIE

+Titre : Fonctions d'une variable (cours avec exemples et exercices corrigés)
Auteurs : Bernard CALVO et Adina CALVO
Edition : Masson

**Titre : <u>Analyse</u> et Géométrie différentielle ,premiére année MPSI , cours et exercices corrigés
Auteurs : Marie ALLANO-CHEVALIER et Xavier OUDOT) , H prépa
Edition : Hachette Supérieure

**Titre : Analyse MPSI (Cours et 1000 exercices corrigés)
Auteur : Jean Marie Monier
Edition : Dunod

+Titre : Analyse première année (cours et exercices avec solutions)
Auteurs : François Liret et Dominique Martinais
Edition : Dunod

**Titre : Analyse MPSI (cours , méthodes , exercices résolus)
Auteurs : D.GUININ et B.JOPPIN
Edition : Bréal

+Titre : Analyse 1
Auteurs : Louis Jérémy . Pierre Mineau . Jean-claude Thiénard
Edition : Vuibert